

Zusammenfassung Kapitel 1

Die Ausbreitung von Licht wird beschrieben durch die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \underbrace{\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}}_{\approx 0 \text{ (keine äußeren Ladungen)}} + \underbrace{\vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0}}_{\approx 0 \text{ (keine äußeren Ladungen)}}$$

↳ typische Quellen: e^- (Hertzscher Dipol, Röntgenröhre)

↳ Beschreibung von Polarisation $\vec{j}_{\text{ind}} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}$ ↑ Kap. 1.3

Lösungsansatz: ebene, monochromatische Wellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad \text{Dispersionsrelation} \quad \boxed{\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \vec{E} = 0 \quad \text{Helmholtzgleichung im Dielektrikum}$$

• getroffene Annahme: $\epsilon(\omega, \vec{r})$ ist räumlich konstant $\vec{\nabla} \cdot \hat{\epsilon} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{E} = 0$

Energiefluss des EM-Feldes: Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*)$$

⇒ Intensität als physikalische Messgröße: $I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}|^2$

Elektrisches Feld eines schwingenden Dipols:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{k^2 \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \vec{p}_0) \frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{Fernfeld}} - \underbrace{[3\hat{e}_r(\hat{e}_r \cdot \vec{p}_0) - \vec{p}_0] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}}_{\text{Nahfeld}} \right\}$$

$-\frac{1}{\epsilon_0} \vec{p}_0 \delta(r)$ ← Feld innerhalb des Dipols.

- im Fernfeld $\vec{E} \propto \frac{1}{r}$, $I \propto \frac{1}{r^2}$
- $\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p}_0)$ keine Abstrahlung in Dipolrichtung
- k^2 : abgestrahlte Leistung $\propto \omega^4$ (Rayleigh Streuung)

Feldausbreitung im Material:

• Definition der Brechzahl: $n = \frac{c_0}{c_{\text{medium}}}$ es zeigt sich $\boxed{n = \sqrt{\epsilon}}$

• Verkürzung der Wellenlänge im Material $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

↳ lässt sich auffassen als eine Verlängerung des Weges: optische Weglänge $n \cdot d$

• Absorption im Material: $I = I_0 e^{-\alpha z}$ Lambert-Beer Gesetz mit $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \kappa$

imaginärer Brechungsindex
↓
 $\hat{n} = n + i\kappa$

Verhalten an Grenzflächen: Stetigkeitsbedingungen: $\vec{E}_1'' = \vec{E}_2''$ $\vec{H}_1'' = \vec{H}_2''$

- Snell's law of refraction: $n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \psi$
 - Fresnel-Formeln: Reflexion- und Transmission an Grenzflächen
- ↳ Unterscheide für $\varphi \neq 0$ zwischen p- und s-Polarisation

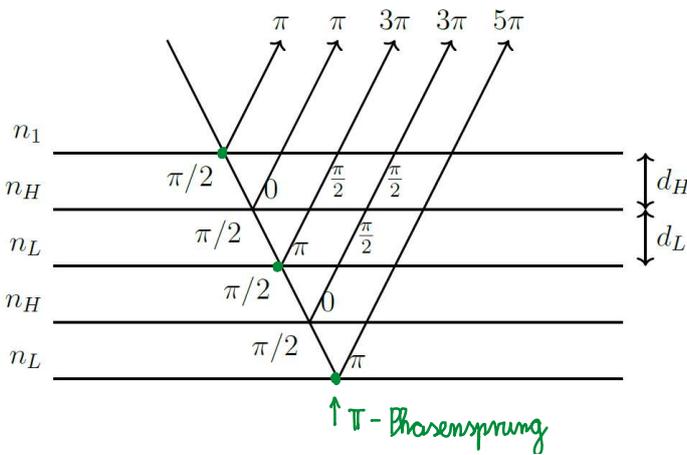
$$S_s = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi} \quad S_T = \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi} \quad R = \frac{I_R}{I_e} = |S|^2 \quad T = 1 - R$$

↑ Prüfung: eventuell Herleitung möglich

senkrechter Einfall $\cos \varphi = 1$ $R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$

- Brewster-Winkel: $R(\varphi_B) = 0 \Rightarrow \tan \varphi_B = \frac{n_2}{n_1}$
- Totalreflexion: $\sin \psi = 1 \Rightarrow \sin \varphi_T = \frac{n_2}{n_1}$
- Phasensprung von π bei Reflexion am hochbrechendem Medium

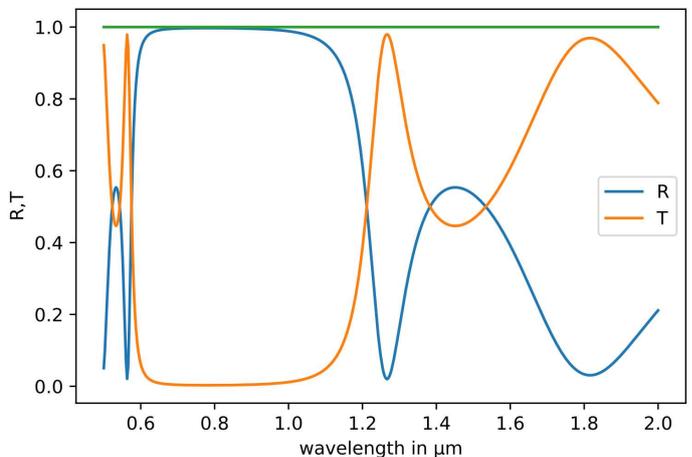
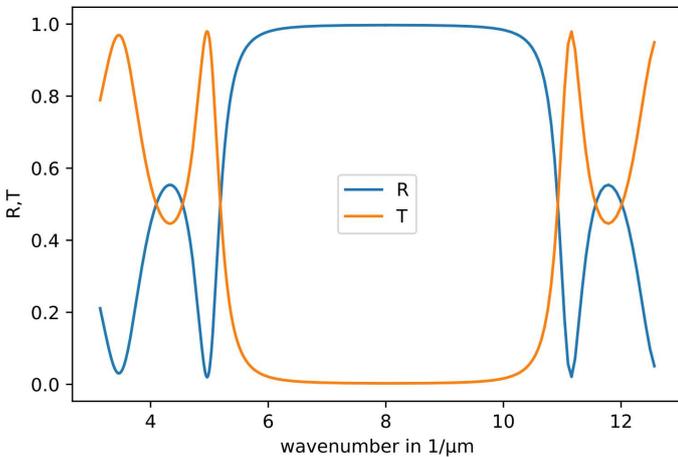
Einschub: Konstruktion eines hochreflektierenden Spiegels **Bragg-Spiegel**



- abwechselnde Schichten hoch- und niedrig brechenden Materials mit $\lambda/4$ -Bedingung

$$d \cdot n = \frac{\lambda}{4}$$

- konstruktive Überlagerung der reflektierten Strahlen (gleiche Phase)
- beliebig hohe Reflektivität möglich



Polarisation des Materials Lorentz-Modell

$$m \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}}_{\text{Massenträgheit}} \vec{d} + m \underbrace{\gamma \frac{d}{dt}}_{\text{Dämpfung}} \vec{d} + m \underbrace{\omega_0^2}_{\text{Rückstellkraft des Kerns}} \vec{d} = q \underbrace{\vec{E}}_{\text{optische Quelle}}$$

• wende FT an ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$)

⇒ Suszeptibilität $\tilde{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \tilde{E}(\omega)$

$$\chi(\omega) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

⇒ Berechnung der Dielektrizitätszahl $\epsilon(\omega) = 1 + \chi$

↳ $\text{Re}(\epsilon) = \epsilon'$ Beschreibt dispersive Eigenschaften

↳ $\text{Im}(\epsilon) = \epsilon''$ Beschreibt Absorption von Licht

• normale Dispersion: $\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} > 0$ bzw. $\frac{\partial \epsilon}{\partial \lambda} < 0$

• Spezialfall Metalle: keine Rückstellkraft $\omega_0 = 0 \Rightarrow$ Abschirmung des Feldes durch e^-
 \Rightarrow exponentielle Dämpfung

Kramers-Kronig Transformation:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} \right] = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega}$$

$$\text{Re}(\chi(\omega)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\text{Im}(\chi(\bar{\omega}))}{\bar{\omega} - \omega}$$

$$\text{Im}(\chi(\omega)) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\text{Re}(\chi(\bar{\omega}))}{\bar{\omega} - \omega}$$

dispersive und absorptive Eigenschaften eines Materials sind miteinander verknüpft

Doppelbrechende Medien:

• anisotrope Materialien: richtungsabhängiger Brechungsindex

↳ dielektrische Verschiebung $D_i = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j$

• transparente Materialien $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \text{Hauptachsensystem}$$

• Wellenausbreitung: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \vec{E}$

ebene Wellen $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) = -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon} \vec{E}$

mit $\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{e}_k$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{\epsilon}^{-1}}_{\hat{M}} \vec{e}_k \times (\vec{e}_k \times \vec{E}_0) = \underbrace{-\frac{1}{n^2}}_{\lambda} \vec{E}_0$$

Eigenwertgleichung $\hat{M} \vec{E}_0 = \lambda \vec{E}_0$

Polarisation des EM-Feldes:

$$\text{Jones Vektor: } \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{cases} 0, \pi & \text{- lineare} \\ \pm \frac{\pi}{2} & \text{- zirkulare} \\ \text{sonst} & \text{- elliptische} \end{cases} \quad \text{Polarisation}$$

$$\text{Polarisator: } \hat{M}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \cdot \text{Polaroid Filter} \\ \cdot \text{Polarisationsprisma} \end{array}$$

$$\lambda/4\text{-Platte: } \hat{M}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad d|n_o - n_e| = \frac{\lambda}{4}$$

$$\lambda/2\text{-Platte: } \hat{M}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad d|n_o - n_e| = \frac{\lambda}{2}$$

Änderung der Polarisationsart

Spiegelung von lin. polarisiertem Licht an der Kristallachse